Schleswig-Holstein
Der echte Norden

SH

Schleswig-Holstein
Ministerium für Schule
und Berufsbildung

Übungsheft

Korrekturanweisung Mathematik 2017

Mittlerer Schulabschluss

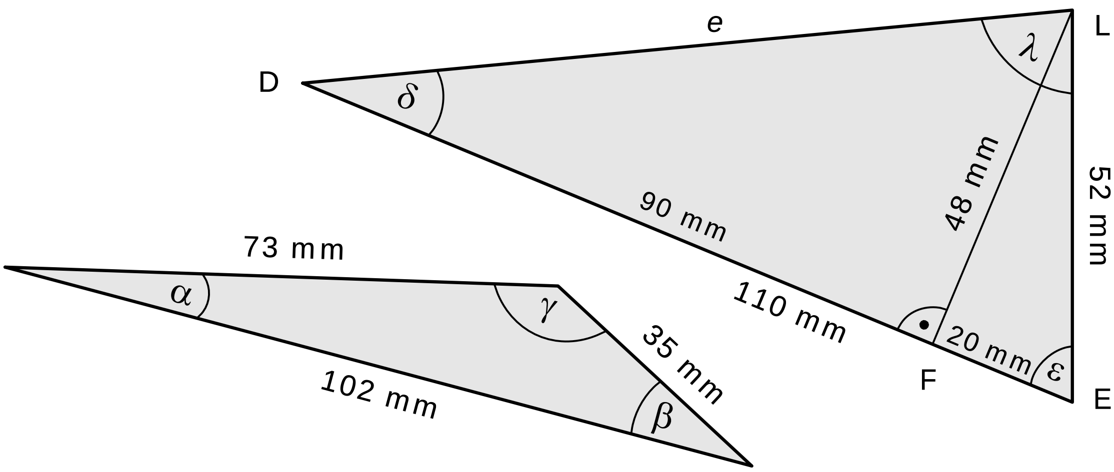
Herausgeber
Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein
Jensendamm 5, 24103 Kiel

Aufgabenentwicklung
Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
Fachkommissionen für die Zentralen Abschlussarbeiten in der Sekundarstufe I

Umsetzung und Begleitung
Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein
zab1@bildungsdienste.landsh.de

B1 Trigonometrie: Trapez-Puzzle – Lösung

a)



➢ Berechne die Seitenlänge *e*.

Satz des Pythagoras im Dreieck DFL

$e^2 = |\,DF\,|^2 + |\,FL\,|^2 = 90^2 + 48^2 = 10404$

$e = \sqrt{10404} = 102$ (1)

/1 P.

➢ Erkläre, welche Bedeutung dieses Ergebnis für das Puzzle hat.

Keine der drei Seitenlängen 73 mm, 35 mm und 102 mm des kleinen Dreiecks stimmt mit den Seitenlängen 52 mm und 110 mm des großen Dreiecks überein. Nur wenn die dritte Seitenlänge *e* exakt mit einer Seitenlänge des kleinen Dreiecks übereinstimmt, kann man die Dreiecke passend aneinanderlegen. Die beiden 102 mm langen Seiten müssen aneinander gelegt werden. (1)

/1 P.

---

b) ➢ Berechne *eines* der drei Winkelmaße δ, ε oder λ aus dem großen Dreieck.

Es sind verschiedene Vorgehensweisen möglich. Am günstigsten ist das Anwenden einer Winkelfunktion auf eines der rechtwinkligen Teildreiecke DFL oder FEL, um δ bzw. ε zu bestimmen. Weil das Dreieck DEL nicht rechtwinklig ist, erfordert die Bestimmung von λ mehr Aufwand.

Im Dreieck DFL gilt: $\tan(\delta) = \frac{|FL|}{|DF|} = \frac{48}{90} = 0{,}5\overline{3} \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 28{,}07°$.

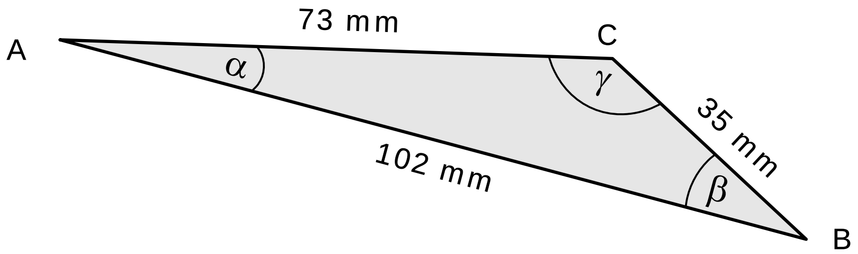
Im Dreieck FEL $\tan(\varepsilon) = \frac{|FL|}{|EF|} = \frac{48}{20} = 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 67{,}38°$

$\lambda \approx 84{,}55°$.

Für einen korrekten Ansatz (1)
Für die Berechnung eines der drei Winkelmaße (1)

/2 P.

➢ Berechne *eines* der drei Winkelmaße α, β oder γ aus dem kleinen Dreieck.



Kosinussatz im Dreieck ABC:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos(\beta) \quad (1)$$

$$2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos(\beta) = |AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2 \quad (1)$$

$$\cos(\beta) = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|} \quad (1)$$

$$\cos(\beta) = \frac{102^2 + 35^2 - 73^2}{2 \cdot 102 \cdot 35} = \frac{15}{17} \approx 0{,}8824 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 28{,}07°. \quad (1)$$

Wurde ein anderes Winkelmaß gewählt,

entsprechende Rechnung für $\alpha \approx 13{,}04°$

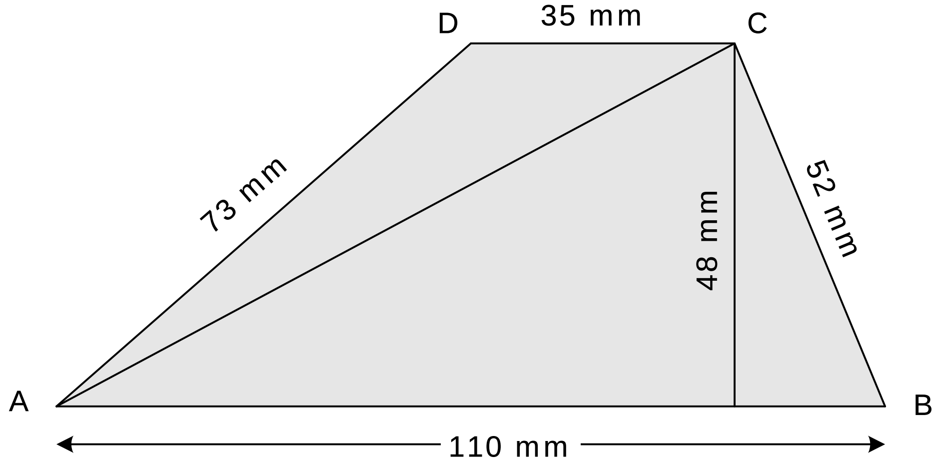
oder

entsprechende Rechnung für $\gamma \approx 138{,}89°$.

/4 P.

---

c)



- Berechne den Flächeninhalt A_{ABCD} des Trapezes ABCD.

$A = \frac{110 + 35}{2} \cdot 48 = 3480$

Das Trapez ABCD hat den Flächeninhalt 3480 mm². (2)

/2 P.

- Berechne den Flächeninhalt A_{ABC} des Dreiecks ABC.

$A = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 48 = 2640$

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt 2640 mm². (2)

/2 P.

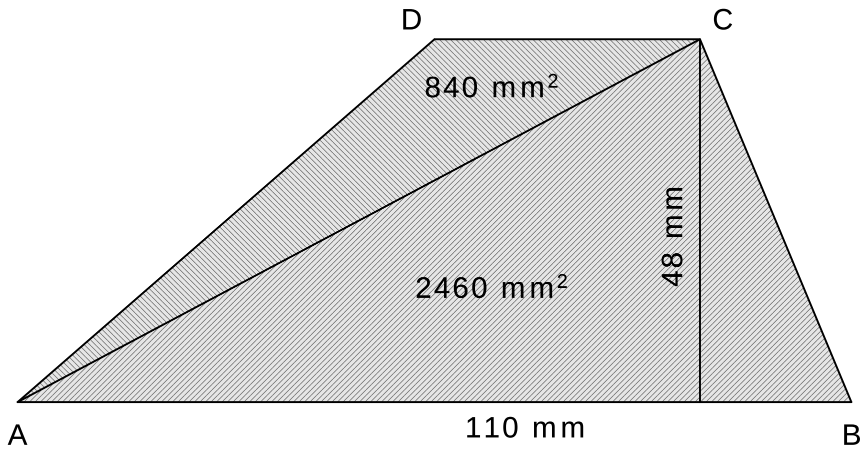
d) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABD ist $A_{ABD} = 2640\ \text{mm}^2$.

➢ Vergleiche die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ABD.

Die beiden Dreiecke ABC und ABD haben den gleichen Flächeninhalt. (1)

/1 P.

➢ Bestimme nun den Flächeninhalt des Dreiecks ACD.

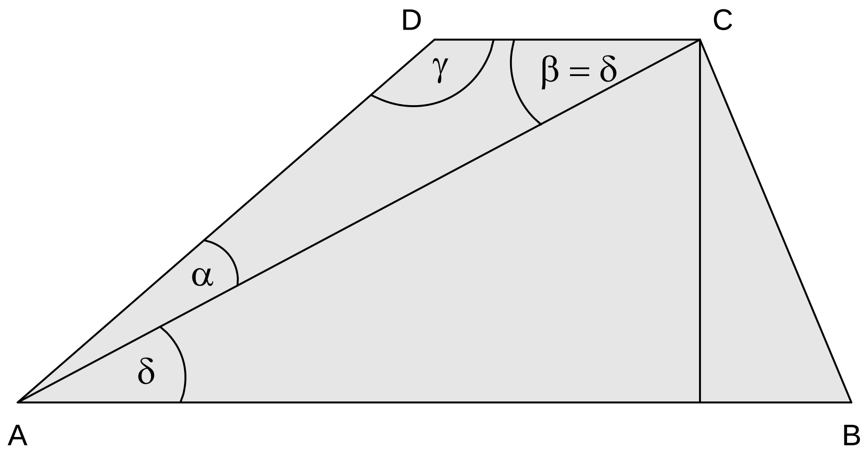


Das gesamte Trapez hat den Flächeninhalt 3480 mm².
Es kann in die Dreiecke ABC und ACD zerlegt werden:
$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD}$.
Daraus folgt $A_{ACD} = A_{ABCD} - A_{ABC} = 3480 - 2640 = 840$. (2)

Die Zeichnung dient an dieser Stelle nur der Verdeutlichung; Zeichnung oder Schraffur werden als Prüfungsleistung nicht erwartet.

/2 P.

➢ Begründe mit Hilfe der in Teilaufgabe **b)** berechneten Winkelmaße, warum die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ des zusammengepuzzelten Trapezes parallel zueinander sind.



Die Winkelmaße β und δ stimmen genau überein. (1)
Wenn die Wechselwinkel ∢ BAC und ∢ DCA gleich groß sind, müssen nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes die Geraden AB und DC parallel zueinander sein. (2)

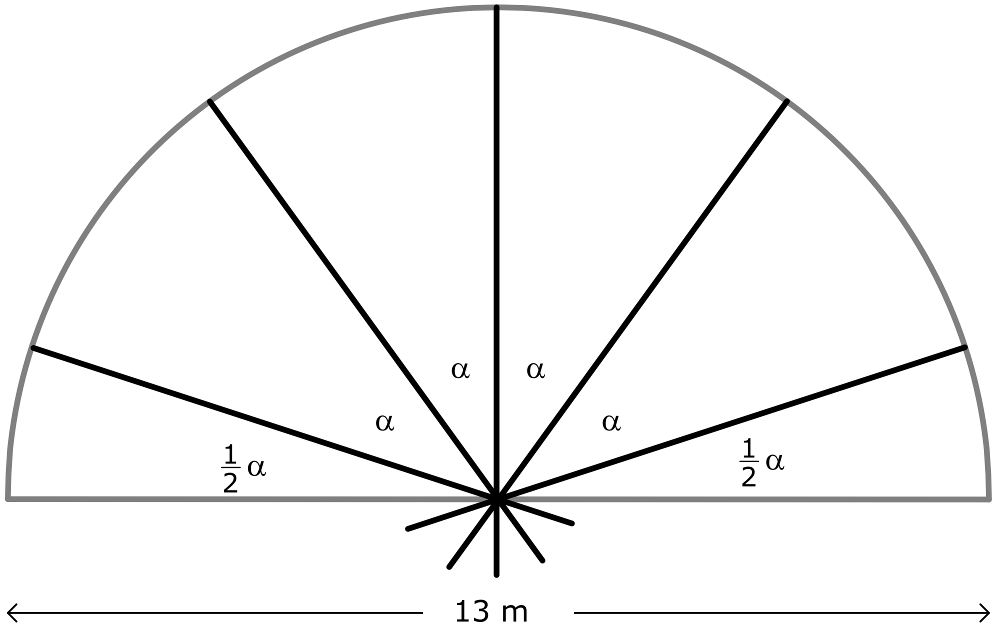
Alternative: In einem Trapez ergänzen sich die beiden Winkel zwischen einem Schenkel und den Parallelen zu 180°, also z.B. ∢ BAD und ∢ ADC. Das Winkelmaß γ und die Summe der Winkelmaße α und δ ergänzen sich exakt zu 180°.

Es wird eine Überlegung mit den exakt bekannten Winkelmaßen erwartet. Eine Überprüfung auf Parallelität mit dem Geodreieck oder ein Nachmessen des Abstandes (Lot von D auf die Gerade AB fällen sowie von C auf die Gerade AB) kann in dieser Teilaufgabe nicht als Nachweis im Sinne der Aufgabenstellung akzeptiert werden.

/3 P.

B2 Stereometrie: Indianertipi – Lösung

a) Tina hat sich das Tipi ausgesucht und für den Nachbau die folgende Zeichnung angefertigt.



Die Abbildung zeigt die Zeltplane, die die Mantelfläche des Tipis bildet.

Tina hat zwei rechteckige Stücke Zellstoff zur Verfügung, um das Tipi im Maßstab 1:100 zu bauen: 15 cm x 5 cm und 20 cm x 20 cm

➢ Überprüfe, aus welchem Stück Zeltstoff sich die Mantelfläche des dargestellten Modells herstellen lässt. Begründe deine Entscheidung.

Das rechteckige Stück Zeltstoff müsste mindestens 13 cm lang und 6,5 cm breit sein, damit sich die Mantelfläche aus einem Stück herstellen lässt.
Das kleinere rechteckige Stück Zeltstoff reicht nicht aus. Tina muss sich für das größere Stück Stoff entscheiden. (2)

/2 P.

➢ Gib an, wie groß der Winkel α zwischen den Stangen sein müsste.

180° : 5 = 36°

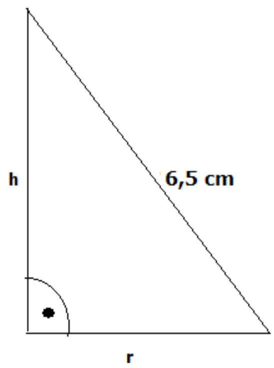
Der Winkel α zwischen den Stützstangen müsste 36° betragen.

/1 P.

Anschließend stellt Tina die Zeltplane zu einem Tipi auf.

➢ Berechne die Höhe des kegelförmigen Tipis. Fertige dazu eine Skizze an.

Berechnung des Umfangs des Grundkreises des Tipis.



Skizze (1)

$u = 2 \cdot 6{,}5 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}$

$u \approx 20{,}42$ cm (1)

$u = 2 \cdot r_{Kegel} \cdot \pi$

$r_{Kegel} = \frac{u}{2 \cdot \pi}$

$r_{Kegel} \approx \frac{20{,}42}{2 \cdot \pi}$

$r_{Kegel} \approx 3{,}25$ cm (1)

$6{,}5^2 = 3{,}25^2 + h^2$

$h = \sqrt{6{,}5^2 - 3{,}25^2}$

$h \approx 5{,}63$ cm (1)

/4 P.

b) Jan baut das Modell einer halbkugelförmigen Grashütte. Sein Modell hat einen Maßstab von 1:50. Die Grashütte hat in der Originalgröße eine Grundfläche von 15 m².

- Berechne den Durchmesser der Grundfläche seines Modells. (Angabe in cm)

<u>Durchmesser in der Originalgröße</u>

$A = r^2 \cdot \pi$

$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

$r = \sqrt{\frac{15}{\pi}}$

$r \approx 2{,}19$ m (1)

$d \approx 4{,}37$ m (1)

<u>Durchmesser des Modells</u>

$d_{Natur} \approx 4{,}37$ m

$d_{Natur} \approx 437$ cm $: 50 \approx 8{,}74$ cm (1)

/3 P.

- Berechne wie viel cm² seines Modells mit Gras bedeckt werden müssen, wenn man für die Eingangsöffnung 2 cm² annimmt.

$r \approx 4{,}37$ cm

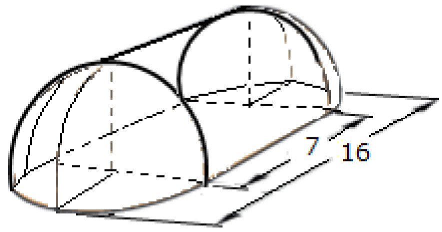
$O \approx 2\pi r^2 - 2$ (1)

$O \approx 118$ cm² (1)

Die grasbedeckte Fläche beträgt 118 cm².

/2 P.

c) Hendrik hat ein Modell eines Wigwams gebaut, das die Form eines Halbzylinders mit einer Viertelkugel auf jeder Seite hat. Dazu hat er folgende nicht maßstäbliche Skizze angefertigt.



Maße in cm

➢ Gib die größte Höhe des Wigwam-Modells an.
Entnimm die Maße seiner nicht maßstäblichen Skizze.

Der Radius der Viertelkugeln beträgt (16 cm – 7 cm) : 2 = 4,5 cm
Damit beträgt die Höhe des Wigwams auch 4,5 cm. (1)

/1 P.

Bei der Präsentation behauptet Hendrik, dass die Bodenfläche des halbzylinderförmigen Teils annähernd so groß ist wie die Bodenfläche der beiden viertelkugelförmigen Teile zusammen.

➢ Gib an, aus welchen Formen sich die Bodenfläche zusammensetzt.

Bodenfläche des Halbzylinders: Rechteck

Bodenfläche der Viertelkugeln: je ein Halbkreis (1)

/1 P.

➢ Überprüfe die Behauptung.

r = 4,5 cm, b = 7 cm

$G_{Hzy} = 2 \cdot r \cdot b = 63\ cm^2$ (1)

$G_{Vku} = r^2 \cdot \pi \approx 63{,}62\ cm^2$ (1)

Die Behauptung ist richtig.

/2 P.

➢ Berechne das Gesamtvolumen des von Hendrik nachgebauten Wigwams.

$V_{Kugel} = \frac{2}{3}\pi r^3 = 190{,}85\ cm^3$

$V_{Halbzylinder} = \frac{1}{2}\pi r^2 b = 222{,}66\ cm^3$ (1)

$V_{gesmt} = 413{,}51\ cm^3$ (1)

/2 P.

B3 Funktionen: Hasen – Lösung

Der Biologie-Kurs beschäftigt sich mit der Entwicklung von Hasen auf einer abgelegenen Insel.

Im Jahr 1800 wurden dort 16 Hasen ausgesetzt. Im Jahr darauf waren es bereits 24 Hasen.

Die Anzahl der Hasen ist zunächst exponentiell gewachsen.

a) Mit Hilfe einer Tabelle verschafft der Kurs sich einen Überblick:

Anzahl der Jahre ab 1800	Anzahl der Hasen
0	16
1	24
2	**36**
3	**54**
4	81

➢ Ergänze die fehlenden Anzahlen der Hasen.

Je ein Punkt pro richtigem Wert.

/2 P.

Die Kursteilnehmer überlegen, mit welcher Funktion man dieses Wachstum beschreiben kann. Es gibt zwei Vermutungen:

$f_1(x) = 16 \cdot 2^x$

$f_2(x) = 8 \cdot 1{,}5^x$

Dabei bedeutet x die Anzahl der Jahre ab 1800.

➢ Zeige, dass beide Funktionsgleichungen nicht richtig sind.

Es reicht zu zeigen, dass sich jeweils mindestens eins der gegebenen Wertepaare nicht durch die beiden Funktionsgleichungen darstellen lässt.

Für den richtig begründeten Ausschluss jeweils einer Funktionsgleichung wird jeweils ein Punkt gegeben.

/2 P.

b) Der Kurs überlegt sich, dass bei dieser Wachstumsrate innerhalb weniger Jahre mehr als 1000 Hasen auf der Insel gelebt haben müssten.

➢ Berechne, nach wie vielen Jahren mehr als 1000 Hasen zu erwarten gewesen wären.

$f(x) = 16 \cdot 1{,}5^x$

$1000 = 16 \cdot 1{,}5^x$ (1)

$\frac{1000}{16} = 1{,}5^x$

$\log_{1,5} \frac{1000}{16} = x$

$10{,}2 \approx x$ (1)

Nach etwa 10,2 Jahren sind es mehr als 1000 Hasen. *Alternativ ist eine Antwort wie „etwas mehr als 10 Jahre" ebenfalls akzeptabel.*

/2 P.

---

c) Im fünften und sechsten Jahr nimmt die Anzahl jeweils um 30 zu.

➢ Ergänze die Tabelle:

Anzahl der Jahre ab 1800	**Anzahl der Hasen**
4	81
5	**111**
6	**141**

Je ein Punkt pro richtigem Wert

/2 P.

➢ Erläutere, welche Bedeutung m=30 in diesem Zusammenhang hat.

m gibt an, um wie viele Tiere jährlich die Hasenanzahl anwächst

/1 P.

➢ Bestimme den Achsenabschnitt b.

$81 = 30 \cdot 4 + b$
$81 - 30 \cdot 4 = b$
$-39 = b$

/1 P.

---

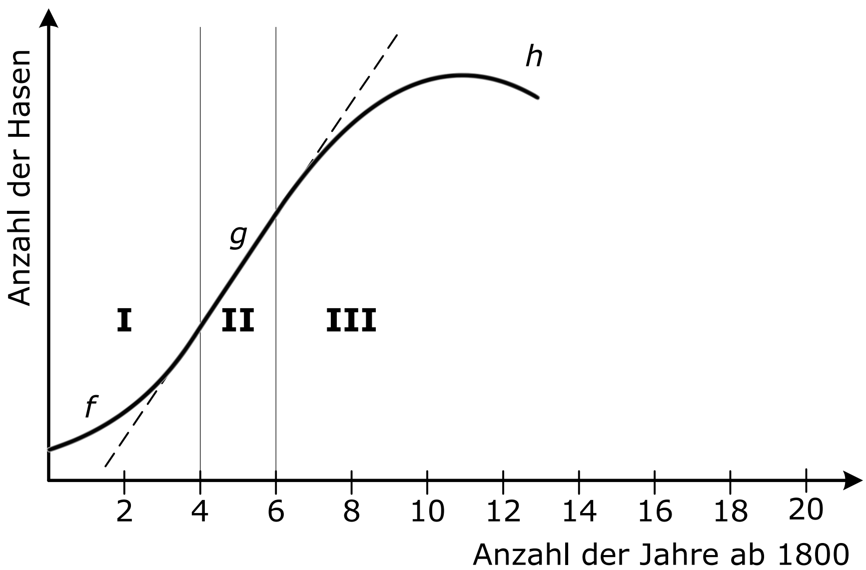
d) Weder die exponentielle noch die lineare Zunahme der Hasen-Anzahl beschreibt die Situation **auf Dauer** richtig.

➢ Nenne einen Grund dafür.

Bei der Beantwortung muss deutlich werden, dass die Hasenpopulation beispielsweise wegen begrenzter Nahrung auf der Insel nicht beliebig steigen kann.

/1 P.

Der abgebildete Graph stellt die Anzahl der Hasen realistischer dar. Man kann drei Abschnitte unterscheiden:



I:	Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt 4:	*f*, exponentieller Verlauf
II:	Zeitpunkt 4 bis zum Zeitpunkt 6:	*g*, linearer Verlauf
III:	ab dem Zeitpunkt 6	*h*, parabelförmiger Verlauf

➢ Interpretiere den Verlauf des Graphen ab dem Zeitpunkt 11.

Nach dem Erreichen einer maximalen Hasenpopulation sinkt der Hasenbestand.

/1 P.

---

e) Für den Zeitraum ab dem siebten Jahr kann der weitere Verlauf des Graphen durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:
$h(x) = -3x^2 + 66x - 147$

- Berechne die Nullstellen dieser Funktion.

$0 = -3x^2 + 66x - 147$ (1)

$0 = x^2 - 22x + 49$

$0 = x^2 - 22x + 11^2 - 121 + 49$

$0 = (x - 11)^2 - 72$

$72 = (x - 11)^2$

$11 + \sqrt{72} = x_1 \approx 19{,}5$ *oder* $11 - \sqrt{72} = x_2 \approx 2{,}5$ (1)

/2 P.

- Skizziere den weiteren Verlauf des Graphen und kennzeichne die rechte Nullstelle. Erkläre, welche Bedeutung diese Nullstelle für die Hasenanzahl hatte.

Es soll ein annährend parabelförmiger Verlauf erkennbar sein. Der Schnittpunkt mit der x-Achse wird im Bereich von 17,5 – 21,5 Jahren akzeptiert. (1)
Zu diesem Zeitpunkt sind die Hasen auf der Insel ausgestorben.

(1)

/2 P.

- Zeige, dass die Parabel ihren Scheitelpunkt an der Stelle x=11 hat und berechne, wie viele Hasen demnach im Jahr 1811 zu erwarten waren.

$h(x) = -3x^2 + 66x - 147$

$h(x) = -3(x^2 - 22x + 49)$

$h(x) = -3(x^2 - 22x + 11^2 - 121 + 49)$

$h(x) = -3[(x - 11)^2 - 72]$ (1)

$h(x) = -3(x - 11)^2 + 216$

S(11/216)

Es waren 216 Hasen zu erwarten. (1)

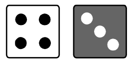
/2 P.

B4 Statistik und Wahrscheinlichkeit: Differenzenbingo – Lösung

Differenzenbingo wird mit zwei normalen Spielwürfeln (einem weißen und einem schwarzen Spielwürfel) und einem Bingofeld gespielt.

Jeder Spieler trägt zunächst in sein leeres Bingofeld vier **verschiedene** Augendifferenzen ein. Dabei wird die kleinere Augenzahl von der größeren Augenzahl subtrahiert.

Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen und deren Augendifferenz wird gebildet. Taucht diese Augendifferenz auf dem Bingofeld auf, darfst du sie durchstreichen. Das Bingofeld, auf dem zuerst alle Zahlen gestrichen wurden, hat gewonnen.

a) Der weiße Würfel zeigt eine 4 und der schwarze Würfel eine 3. 

- Trage das entsprechende Kreuz in das Koordinatensystem an der richtigen Stelle ein. (1)

/1 P.

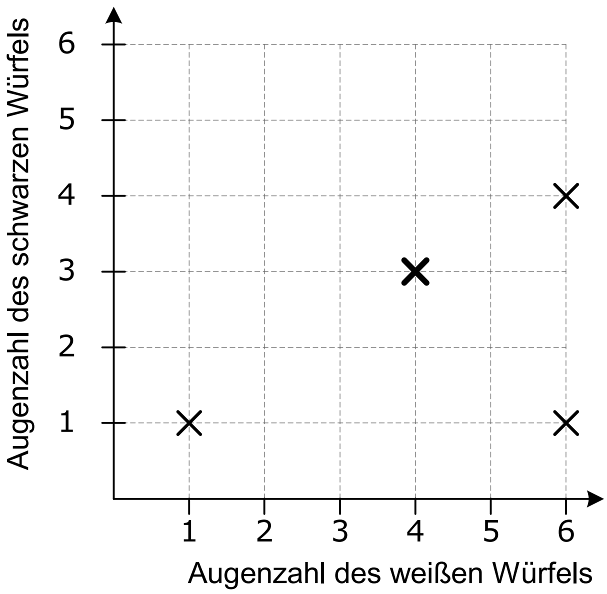
Zuvor wurde bereits dreimal gewürfelt.

- Entnimm dem Koordinatensystem die gewürfelten Augendifferenzen und streiche diese auf den Bingofeldern durch. (2)

/2 P.

- Entscheide und kreuze an, welches der 3 Bingofelder die meisten Treffer hat. (1)

/1 P.



☐

~~1~~	3
4	~~5~~

☐

~~0~~	4
~~1~~	~~2~~

☒

~~2~~	~~5~~
~~1~~	~~0~~

/1 P.

---

b) Es gibt 36 Möglichkeiten, die Augenzahlen zweier Würfel als Zahlenpaar aufzuschreiben. Alle Zahlenpaare sind gleich wahrscheinlich.

➢ Gib alle Augendifferenzen an, die vorkommen können (1)

Es können die Augendifferenzen 0, 1, 2, 3, 4 und 5 vorkommen.

/1 P.

➢ Gib die Wahrscheinlichkeit für die Augendifferenz 2 an.

P(Augendifferenz 2) = $\frac{8}{36}$ (1)

/1 P.

---

c) Das folgende Bingofeld ist gegeben.

1	3
4	5

- Entscheide, für welche Augendifferenz im Bingofeld die größte Wahrscheinlichkeit besteht, dass sie nach dem nächsten Wurf gestrichen wird. Begründe deine Entscheidung.

  Die größte Wahrscheinlichkeit besteht für die Augendifferenz 1, denn diese kommt unter den 36 Möglichkeiten am häufigsten vor.

  P(Augendifferenz 1) = $\frac{10}{36}$ (2)

/2 P.

Du darfst eine der Augendifferenzen im Bingofeld durch eine andere Augendifferenz ersetzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Wurf eine Zahl gestrichen wird, soll dabei erhöht werden.

- Erläutere deine Vorgehensweise.

  Es muss eine der nachfolgend aufgeführten Veränderungen genannt werden:

  Beispiel: Die 3 kann durch die 2 ersetzt werden.

  Erläuterung:

  P(Augendifferenz 3) ist kleiner als P(Augendifferenz 2). (2)

/2 P.

---

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Wurf **eine** der Augendifferenzen gestrichen wird, soll $\frac{20}{36}$ betragen.

- Ergänze das Bingofeld so, dass dies gilt.

4	5
2	

  Es kann entweder eine 0 oder eine 3 ergänzt werden. (2)

/2 P.

---

e) Die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Wurf eine der Augendifferenzen gestrichen wird, soll $\frac{24}{36}$ betragen.

- Ergänze das Bingofeld so, dass dieses gilt.

	5
1	

Es gibt zwei Möglichkeiten der Ergänzung:

4 und 2 oder

0 und 3

Für das Nennen einer der dieser beiden Möglichkeiten (2)

/2 P.

---

f) Du möchtest beim Bingospiel unbedingt gewinnen. Dazu empfiehlt es sich, für das Bingofeld solche Zahlen zu wählen, die mit hoher Wahrscheinlichkeit bei den nächsten Würfen gestrichen werden.

- Wähle geeignete Zahlen aus, trage sie in das Bingofeld ein und begründe deine Entscheidung.

Es sind die Zahlen 0, 1, 2 und 3 in das Bingofeld einzutragen, denn bei diesen Zahlen ist die Wahrscheinlichkeit, bei den nächsten Würfen gestrichen zu werden, am höchsten.

P(Augendifferenz 0) = $\frac{6}{36}$

P(Augendifferenz 1) = $\frac{10}{36}$

P(Augendifferenz 2) = $\frac{8}{36}$

P(Augendifferenz 3) = $\frac{6}{36}$ (4)

/4 P.
